

Les nombres relatifs en quatrième

Chantal GOBIN, Claude ROBIN
IREM de POITIERS

Pour l'introduction de l'addition et de la soustraction des nombres relatifs, des enseignants, nous l'avons montré précédemment (voir «Des Mathématiques en Sixième», «Des mathématiques au Cycle Central : tome 1»), ont un souci de recherche de modèles "concrets". Ces modèles permettent, bien sûr, de comprendre et de mieux appréhender l'addition, mais ils ne fonctionnent plus pour la multiplication et constituent des obstacles pour les élèves. Stendhal écrit dans son livre " Vie de Henry Brulard " : " ...supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions ? "

Dans cet article, nous regarderons comment les règles de calcul sur les nombres relatifs sont apparues dans l'histoire puis nous rechercherons des modes d'introduction de la multiplication des nombres relatifs auprès des élèves. Après avoir brièvement parlé de la division, nous nous intéresserons aux conventions d'écriture, puis nous analyserons une activité permettant d'utiliser toutes les opérations sur les relatifs.

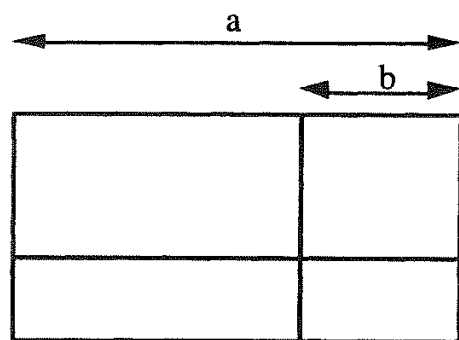
La multiplication

a) Historique

Regardons comment on introduisait les règles de calcul sur les nombres relatifs au moment de leur mise en place. Dans tout ce qui suit, les lettres représentent pour leurs auteurs des nombres positifs.

Euler (1707–1783) explique dans son " Introduction complète à l'algèbre " et justifie, les règles de calculs sur les négatifs. Il dit que $(-1) \times (-1) = 1$ " car le résultat est 1 ou -1 et comme $1 \times (-1) = -1$, le résultat est nécessairement 1 ". Il explique aussi que " $-a$ multiplié par $-b$ fait $+ ab$ car il a déjà expliqué que $-a$ par $+b$ fait $-ab$ " !

Le lien nombre–géométrie fut un obstacle pour faire accepter les règles de calcul avec les nombres relatifs ; ainsi à partir de $(a - b)(c - d)$, les produits doivent être ajoutés ou soustraits :



$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Clairaut déduit de cette égalité, en posant $a = 0$ et $c = 0$, que $(-b) \times (-d) = bd$.

Mais cela a-t-il un sens ? Peut-on enlever quelque chose de rien ? De plus, dans le premier membre les signes “-” sont des signes opératoires tandis que dans l’écriture $-b$, le signe “-” traduit une quantité négative qui, à l’époque, n’avait pas d’existence propre.

Quelques tentatives de preuves irréfutables sont à noter. Citons celles de Hankel et de Mac Laurin. Les deux mathématiciens basent leurs explications sur la distributivité de la multiplication sur l’addition de deux nombres opposés et le produit nul quand on multiplie par 0.

$$\text{Ainsi, pour le premier : } b + \text{opp } b = 0 \quad a + \text{opp } a = 0$$

$$0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = a \times b + a \times \text{opp } b$$

$$0 = 0 \times \text{opp } b = (a + \text{opp } a) \times \text{opp } b = a \times \text{opp } b + \text{opp } a \times \text{opp } b$$

$$\text{Il s’ensuit l’égalité : } a \times b = \text{opp } a \times \text{opp } b \text{ et } ab = (-a) \times (-b)$$

Pour le second : $+ a - a = 0$, on peut multiplier les deux membres par $-n$

$$(+a - a) \times (-n) = 0 \times (-n)$$

$$(+a) \times (-n) - a \times (-n) = 0 \text{ donc les deux nombres sont des nombres opposés,}$$

$$\text{or, } +a \times (-n) = -an, \text{ donc } -a \times (-n) = +an, \text{ et } - \text{ par } - \text{ donne } + !$$

Vers les années 1958, l’introduction se faisait à l’aide de modèles vectoriels et d’images relevant du domaine de la physique.

Historiquement, la recherche de modèles concrets (gains, pertes, ...) a ralenti l’émergence des règles de la multiplication des nombres relatifs. Ne devons-nous pas en tirer des leçons pour introduire l’addition et la soustraction encinquième ? Peut-être est-il plus judicieux de très vite dépasser ces exemples concrets pour travailler sur les nombres ? En quatrième, il est plus pertinent de donner aux relatifs leur statut de nombres et de les faire fonctionner dans des contextes mathématiques.








b) Que faire avec les élèves ?

- On peut s'appuyer sur les résultats fournis par la calculatrice : après quelques calculs, il y a constatation d'une règle, cette règle est admise pour l'ensemble des nombres, validée, puis appliquée. C'est, certes, un moyen rapide, utilisant les outils modernes dont les élèves disposent, mais il n'y a aucune justification. N'est-ce pas dangereux pour la mise en place de la démonstration étudiée parallèlement ?

- Des manuels proposent de donner la règle d'autorité, puis l'élève la teste sur quelques exemples, ensuite on la valide. Là encore, qu'est-ce qui explique que " un nombre négatif multiplié par un nombre négatif donne un produit positif " ? Il faut que l'élève l'accepte sans réfutation.

- On peut trouver, dans d'autres manuels ou brochures, des situations essayant de faire comprendre à l'élève pourquoi il en est ainsi. Citons quelques exemples.

Ainsi, dans une brochure APMEP (1980), il est proposé de prolonger la règle de construction d'une table de multiplication :

$4 \times (-3) = -12$		$(+3)$
$3 \times (-3) = -9$		$(+3)$
$2 \times (-3) = -6$		$(+3)$
$1 \times (-3) = -3$		$(+3)$
$0 \times (-3) = 0$		$(+3)$
$(-1) \times (-3) = +3$		$(+3)$
$(-2) \times (-3) = +6$		$(+3)$

Puis on étend aux nombres décimaux.

- On peut lire dans un manuel édité en 1983 par Cédic, une explication utilisant un prolongement de la multiplication par une symétrie par rapport à 0 pour le produit de deux entiers relatifs entiers et étendant la règle à tous les nombres.

- On trouve aussi des explications à partir de la notion d'opposé, $-x$ et x sont opposés, et de la propriété : " $-x$ est aussi $(-1) \times x$ "

$$\begin{aligned}
 (-2) \times (-3) &= [(-1) \times 2] \times (-3) \\
 &= (-1) \times [2 \times (-3)] \\
 &= (-1) \times (-6) \\
 &= \text{opp}(-6) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

d'où $(-2) \times (-3) = 6$

• Une autre approche est celle proposée par l’IREM de Poitiers. Elle utilise la résolution d’équations.

Résoudre, sans calculatrice, l’équation : $\frac{y}{-3} + (-4) = 7$

Parmi les méthodes de résolution possibles, retenons-en deux, les plus couramment utilisées par les élèves.

1 ^{ère} méthode	2 ^{ème} méthode
$\frac{y}{-3} + (-4) = 7$	$\frac{y}{-3} + (-4) = 7$
$\frac{y}{-3} = 11$	$y + (-4) \times (-3) = 7 \times (-3)$
$y = 11 \times (-3)$	$y + (-4) \times (-3) = -21$
$y = -33$	

La 1^{ère} méthode permet de trouver la solution tandis que pour la 2^{ème}, le fait de ne pas savoir calculer $(-4) \times (-3)$ bloque les élèves qui demandent de l’aide, ils hésitent entre 12 et (-12) .

Un recensement des méthodes utilisées va alors permettre de trouver la valeur de ce produit $(-4) \times (-3)$. En effet, il suffit de remplacer y par sa valeur (-33) dans l’équation $y + (-4) \times (-3) = -21$, on obtient $-33 + (-4) \times (-3) = -21$ d’où l’on déduit que le produit $(-4) \times (-3)$ ne peut qu’être égal à 12.

Aucun mode d’introduction n’est capable d’expliquer de manière satisfaisante la règle des signes, mais certains permettent de faire comprendre le bien fondé de cette règle. Il est important de montrer aux élèves que la multiplication des relatifs est un prolongement de celle déjà connue, que la règle des signes est cohérente et qu’il y a compatibilité avec tout leur savoir antérieur, en particulier, les propriétés des opérations. De plus, varier les justifications permet de convaincre des élèves de sensibilités différentes.

c) La règle

La règle du signe d’un produit de deux nombres relatifs étant dégagée avec les élèves, il reste à la formuler.

Certaines formulations ne semblent pas très judicieuses :

exemple 1 : $(-a) \times b = -ab$
 $(-a) \times (-b) = ab$

L'écriture sous cette forme renforce l'idée déjà trop répandue chez les élèves que a est positif et $(-b)$ négatif.

exemple 2 : $-x - = +$ ou moins par moins donne plus
 $-x + = -$ moins par plus donne moins.

Ces écritures sont dénuées de sens, les nombres étant assimilés à des signes. L'idée qu'un nombre relatif est constitué " d'un signe et d'un nombre " est alors renforcée.

Il semble préférable de formuler cette règle en français en utilisant les mots nombre et produit.

Exemple : " Le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif.
Le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est un nombre négatif. "

On peut ensuite exemplifier.

Nous ne nous étendons pas dans cet article sur la règle du quotient de deux nombres relatifs puisqu'elle se déduit de celle du produit. En effet, le quotient de deux nombres n'est que le produit du premier par l'inverse du second.

Le calcul littéral

En quatrième et troisième, l'introduction et l'utilisation du calcul algébrique rendent obligatoire la notation $-b$ pour l'opposé de b .

Le danger de la phrase " $-b$ désigne l'opposé du nombre b " est que les élèves assimilent automatiquement $-b$ à un nombre négatif. Il est tentant de faire le rapprochement entre le signe " $-$ " désignant " opposé " et le signe " $-$ " prédicatif de -27 . Pourtant cette notation est indispensable pour :

- les simplifications d'expressions algébriques
- les résolutions d'équations
- les reconnaissances et identifications de formes telles que $y = ax$ en quatrième et $y = ax + b$ en troisième.

Analysons les difficultés :

Avec les nombres, -7 désigne à la fois le relatif -7 qui est négatif et le nombre qui est l'opposé de 7 .

Avec les lettres, b doit être vu comme le codage d'un nombre et $-b$ comme le codage de l'opposé du nombre codé b . Le problème est que les lettres ne sont pas des nombres mais des représentants de nombres. Pourtant ces lettres apparaissent dans des expressions et sont traitées dans certains cas comme si l'on effectuait des calculs numériques.

Ainsi lorsqu'on écrit $\frac{b}{b} = 1$, ou $a - a = 0$ ou $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$, on utilise la même procédure que pour des nombres et de plus, pour les deux premiers cas cités, on obtient des nombres connus.

En revanche, si l'on rencontre $a + a$, on ne peut que donner un autre représentant de ce nombre, ce que l'on fait rarement avec les nombres ; quand remplace-t-on $7,3 + 7,3$ par $2 \times 7,3$?

L'élève doit alors comprendre que cette écriture d'un autre représentant ne sert pas à faire un "calcul" à proprement parler mais à obtenir une écriture plus courte par certaines simplifications. Ainsi $a - b - 2,5a + 3b$ n'est pas un calcul à faire mais une expression, une représentation d'un nombre que l'on cherche à écrire avec moins de termes dans le but d'effectuer ensuite une application numérique, d'étudier une fonction, de résoudre une équation ou de reconnaître une forme : équation de droite, fonction linéaire ou affine, forme développée d'un carré ...

Ce but est malheureusement absent dans de nombreux exercices où l'on demande seulement de simplifier.

Ce problème de l'assimilation de $-b$ à un nombre négatif peut-être, sinon évité, du moins atténué par un passage moins rapide aux expressions littérales. L'élève doit comprendre d'une part que b et $-b$ sont des codages de nombres et non des nombres et d'autre part que ce sont les propriétés des opérations qui sont étendues au calcul littéral et non les caractéristiques de notre numération décimale (ab ne désigne pas $a \times 10 + b$ comme 27 désigne $2 \times 10 + 7$).

Certes, les propriétés des opérations ne figurent plus dans les programmes comme objets d'étude mais on les fait fonctionner, souvent sans les expliciter, pour tout calcul numérique et pour toute simplification d'expression littérale.

En phase d'apprentissage, comme c'est le cas surtout en quatrième, pouvons-nous faire l'économie du détail de toutes les étapes sans installer des automatismes vides de sens qui entraîneront des erreurs ?

Ainsi, pour simplifier l'expression $a - b - 2,5a + 3b$, examinons ce que l'on peut se dire :

- on peut remplacer les soustractions par des additions d'opposés :
 $a + \text{opp } b + \text{opp } 2,5a + 3b$ ou $a + (-b) + (-2,5a) + 3b$
- on peut changer l'ordre des termes dans une addition :
 $a + (-2,5a) + (-b) + 3b$
- on peut grouper les termes d'une addition $[a + (-2,5a)] + [(-b) + 3b]$
- on peut considérer que :

<p>$(-2,5a)$ c'est $(-a) + (-1,5a)$ qui permet de simplifier $a + (-a) + (-1,5a)$ en $-1,5a$; la somme de deux opposés étant 0 et quand on ajoute 0 à un nombre, on ne change pas ce nombre. De même pour $(-b) + 3b$.</p>	ou	<p>on peut utiliser la factorisation c'est-à-dire interpréter a comme $1 \times a$, $(-2,5a)$ comme $(-2,5) \times a$ $a + (-2,5a)$ s'écrit alors $[1 + (-2,5)]a$ ou $-1,5a$. De même pour $(-b) + 3b$.</p>
--	----	--

Toutes ces étapes ne peuvent être écrites pour chaque simplification d'expression algébrique, pourtant il convient certainement de les expliciter à des moments opportuns pour éviter les erreurs.

Pour la résolution d'une simple équation telle que $27 - 3x = 50$, les étapes, dans un premier temps sont :

$$\begin{aligned}
 27 - 3x &= 50 \\
 27 + (-27) + (-3x) &= 50 + (-27) \\
 0 + (-3x) &= 23 \\
 -3x &= 23
 \end{aligned}$$

Puis :

<p>passer aux opposés : $\text{opp } (-3x) = \text{opp } 23$ $3x = -23$ $x = \frac{-23}{3}$ ou $x = -\frac{23}{3}$</p>	ou	<p>considérer que : $-3x = (-3) \times x$ $(-3) \times x = 23$ $x = \frac{23}{-3}$ ou $x = -\frac{23}{3}$</p>
--	----	---

Notons que $-3x$ peut aussi être interprété comme l'opposé du produit de 3 et de x et noté $-(3x)$. En classe nous étudions que l'opposé d'une somme (d'une différence) est la somme (la différence) des opposés. Par contre nous explicitons rarement la règle de l'opposé d'un produit et les élèves ont parfois tendance à étendre au produit la règle connue pour la somme et à écrire $-(3x) = (-3) \times (-x)$.

Exemple d'activité utilisant les nombres relatifs : Les 7 familles

Nous sommes des points et nous habitons tous dans un rectangle dont les sommets ont pour coordonnées : $(-7 ; 10)$; $(7 ; 10)$; $(7 ; -10)$; $(-7 ; -10)$.

Voici nos adresses :

Famille 1 : notre ordonnée est l'opposé de notre abscisse.

Famille 2 : en divisant notre abscisse par 2 et en retranchant 5 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 3 : en multipliant notre abscisse par -3 et en retranchant 7 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 4 : notre ordonnée est égale au carré de notre abscisse divisé par 2.

Famille 5 : notre ordonnée est égale au cube de notre abscisse divisé par -4 .

Famille 6 : le produit de notre abscisse et de notre ordonnée est toujours égal à 4.

Famille 7 : la somme du carré de notre abscisse et du carré de notre ordonnée est toujours égale à 25.

1°) Pour chaque famille, trouve 4 points de la famille.

2°) Donne l'adresse de chaque famille sous la forme d'une relation qui lie l'abscisse x et l'ordonnée y des points de la famille.

3°) Représente les 7 familles.

4°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les bords du rectangle.

5°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les axes.

6°) Quels sont les points qui appartiennent à plusieurs familles ?

Le thème de cette activité est la recherche sous forme ludique d'ensembles de points dont les définitions sont rédigées en français.

Ces points sont à chercher dans une " fenêtre " rectangulaire du plan repéré centrée à l'origine.

Les nombres relatifs sont omniprésents :

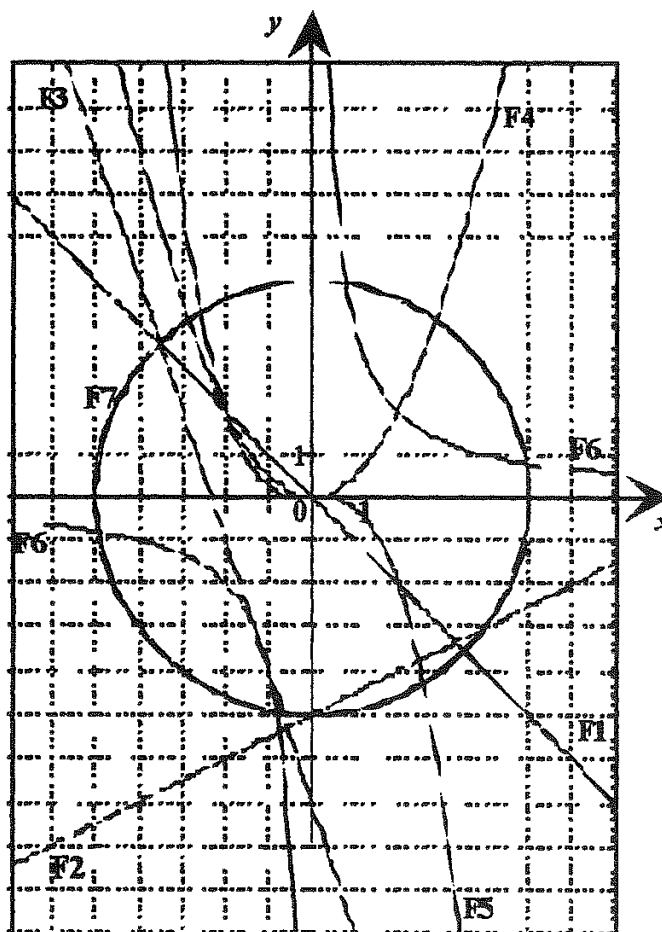
- dans les coordonnées des points donnés et des points cherchés.
- dans les calculs à faire pour trouver les coordonnées des points cherchés.

Les différentes familles ont été choisies de manière à faire utiliser toutes les opérations sur les relatifs dans tous les cas de signes possibles. Et c'est là l'intérêt essentiel de l'activité pour l'apprentissage et l'entraînement au calcul avec les relatifs.

L'activité vise aussi à faire découvrir à l'élève la notion d'équation de courbe. Elle permet d'autre part aux élèves de réfléchir sur la notion de nombre : au départ pour trouver des points pour les familles ils ont tendance à privilégier les entiers naturels et à penser que chaque famille ne comporte que " quelques " points. découvrir que chaque famille contient une infinité de points remet en question leur conception du nombre.

Enfin pour les questions 4, 5, 6, le va-et-vient entre graphique et équations permet un travail très riche à des niveaux d'approfondissement possibles très divers, en particulier sur la notion de valeur exacte et de valeur approchée.

Les calculs à effectuer sont " *la mise en œuvre de programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de relatifs* "..., " *utilisent des expressions littérales pour des calculs numériques* " et " *utilisent du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers* " comme le stipule le programme.



On obtient trois droites, une parabole, une hyperbole et un cercle :

$$\begin{array}{llll} F_1 : y = -x & F_2 : y = \frac{x}{2} - 5 & F_3 : y = -3x - 7 & F_4 : y = \frac{x^2}{2} \\ F_5 : y = \frac{x^3}{-4} & F_6 : xy = 4 & F_7 : x^2 + y^2 = 25 & \end{array}$$

Remarques sur la gestion de l'activité :

- En fonction des réactions des élèves on peut, avant de faire représenter les familles, augmenter graduellement le nombre de points à chercher pour chaque famille afin de faire franchir aux élèves certains obstacles.
- On peut aussi faire un bilan par groupe, sur transparent, ce qui permet d'obtenir " beaucoup " de points de chaque famille et avoir une idée de leur " lieu d'habitation ".
- En utilisant des équations de droite du type $y = x + a$ ou $y = x - a$ (a entier relatif), on peut adapter cette activité et l'utiliser en cinquième.

Au niveau de la quatrième, les apprentissages sur les relatifs supposent donc des modes d'introduction qui permettent de les traiter comme des nombres dans un contexte mathématique. La règle du signe d'un produit pourra alors être dégagée et formulée dans un langage faisant sens pour l'élève. Grâce à un choix judicieux d'exercices d'application, ces règles pourront être assimilées et les apprentissages sur le calcul littéral poursuivis.